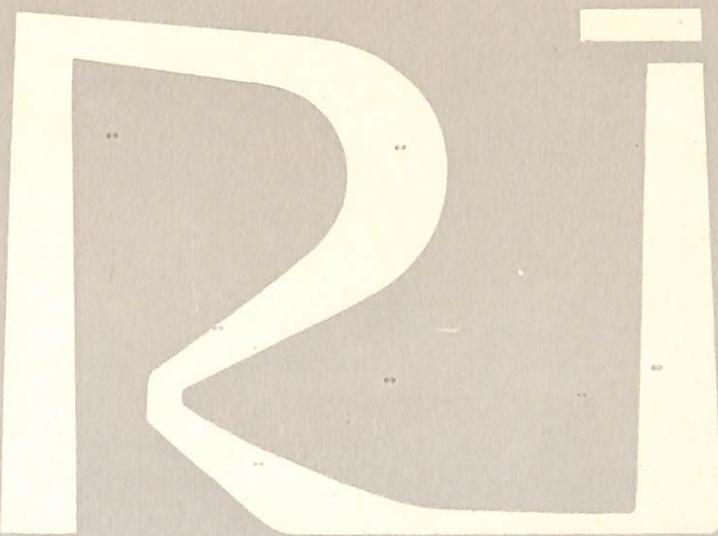


INFORMACIJE B

B R O J 40



Dr ing. PETAR MILANOVIC

**PRIMENA MODELA OD OPTIČKI AKTIVNIH MATERIJALA
KOD PROBLEMA JAMSKIH PRITISAKA**

R U D A R S K I I N S T I T U T B E O G R A D 1966.

Izdavač ..
RUDARSKI INSTITUT — BEOGRAD

Glavni urednik
Dipl. ing. **MOCO SUMBULOVIC**

R e d a k c i o n i o d b o r

Blažek ing. Aleksandar, Ceperković ing. Miodrag,
Dular ing. Slavko, Đorđević ing. Kirilo, Filipovski
ing. Blagoje, Gluščević prof. ing. Branko, Jovanović
dipl. hem. Nićifor, Kovačević ing. Vjekoslav, Lešić
prof. dr ing. Đura, Malić prof. dr ing. Dragomir,
Marinović ing. Ivo, Mihajlović ing. Jovan, Misita ing.
Risto, Novaković ing. Ljubomir, Odić ing. Tvrtko,
Perišić dr ing. Mirko, Popović ing. Božidar, Slokan
prof. dr ing. Karel, Spasojević ing. Borislav.

Stampa: „PROSVETA” — Požarevac

B R O J 40

Dr ing. PETAR MILANOVIC

**PRIMENA MODELA OD OPTIČKI AKTIVNIH MATERIJALA
KOD PROBLEMA JAMSKIH PRITISAKA**

Beograd, 1966.

S a d r ž a j

Uvod	3
Principi izrade modela	3
Osnovi dimenzionalne analize	3
Specijalni uslovi pri modeliranju i problem jamskog priskaka	5
Uslovi sličnosti kod modeliranja sa optičkim aktivnim materijalima	7
Optičko aktivni materijali koji se upotrebljavaju za izradu modela	9
Osnovne postavke i metod ispitivanja napona u polarizovanom svetlu	10
Zaključak	12
Literatura	13

U V O D

Pri rešavanju problema raspodele napona u stenskom masivu oko rudarske prostorije, matematičkim metodama nailazi se na niz teškoća koje se mogu izbeći proučavanjem konkretnog problema na modelu.

Može se reći da nijedna metoda, koja se koristi kod rešavanja naponskog stanja u stenskom masivu, ne daje potpuno objašnjenje problema, usled nedovoljnog poznavanja fizičko-mehaničkih osobina stena „in situ”, heterogenosti stenskog mäsiva, anizotropije i drugih nepoznatih faktora.

Ispitivanja na modelima, dopunjena matematičko-teoretskim studijama i merenjima u jami, omogućavaju dobijanje jasnije slike o raspodeli napona, a s tim i ostalih činilaca važnih za proučavanje čitavog mehanizma ponašanja stenske mase pri izvođenju rudarskih radova.

Materija je vrlo obimna i kompleksna i za njeno rešavanje se koriste i dostignuća drugih naučnih disciplina.

U ovom radu obradiće se samo nekoliko važnijih opštih problema u vezi proučavanja modela.

PRINCIPI IZRADE MODELA

Osrovi dimenzionalne analize

Mnoge teškoće koje se sreću kod eksperimentalne analize napona mogu se eliminisati, kad bi se merenja i analitički proračuni mogli izvršiti direktno na proučavanom objektu (prototipu). Često to nije moguće ili su, pak, procesi koji se proučavaju toliko

komplikovani da se jedino mogu uspešno proučiti na modelu, uz stalnu kontrolu uslova.

Da bi moglo početi proučavanje neke pojave ili procesa na modelu, prethodno treba pronaći matematičke zavisnosti između ispitivanih veličina na modelu i prototipu. Ove matematičke zavisnosti rešavaju se pomoću dimenzionalne analize, jedne od grana primenjene matematike.

Dimenzionalna analiza neće biti detaljno prikazana, već samo data dva aksioma na kojima ona počiva i jedan konkretan primer.

Aksiom 1. — Apsolutna numerička jednakost količina može postojati samo onda, kad su te količine i kvalitativno slične, tj. te količine moraju imati iste dimenzije.

Aksiom 2. — Odnos veličina dveju istih količina je nezavisan od jedinica upotrebljenih za njihovo merenje.

Dimenzionalna analiza daje više kvalitativne nego kvantitativne odnose, ali ako se kombinuje sa eksperimentom daje kvantitativne rezultate i tačne jednačine po kojima se proučavana pojava ponaša.

Odnosi model — prototip — Da bi se što jasnije izložili načini određivanja odnosa model-prototip, proučiće se odnos tangencijalnih napona modela i prototipa za slučaj stabilnosti kosina etaža. Tangencijalni napon je funkcija

$$T = f(a, H, K; W G, \mu) \quad (1)$$

gde je:

T — tangencijalni napon ($F L^{-2}$) (kg/cm^2)

a — dužina,
H — visina etaže (L)

H
a — tangens ugla kosine etaže

K — konstanta; odnos opterećenja,
W — specifična težina materijala ($F L^{-3}$) (kg/cm^3)
G — modul krutosti materijala ($F L^{-2}$) (kg/cm^2)
 μ — Poasonov koeficijent

Ovaj odnos može se izraziti i kao

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \pi_4) \quad (2)$$

gde su π bezdimenzionalni i nezavisni parametri. Na osnovu Buckingham-ove Pi-teoreme, broj Pi-članova potreban za izražavanje funkcionalne zavisnosti jednak je broju nezavisnih parametara manje broj osnovnih dimenzija.

Jednačinu (1) možemo zato pisati i u sledećem obliku:

$$C_1 a^{c_1} H^{c_2} (K \cdot w)^{c_3} G^{c_4} T^{c_5} \mu^{c_6} = 0 \quad (3)$$

Odgovarajuća dimenzionalna jednačina je:

$$L^{c_1} L^{c_2} (FL^{-3})^{c_3} (FL^{-2})^{c_4} (FL^{-2})^{c_5} = 0 \quad (4)$$

Na osnovu jednačine (4) mogu se napisati dve pomoćne:

$$L: C_1 + C_2 - 3C_3 - 2C_4 - 2C_5 = 0 \quad (5)$$

$$F: C_3 + C_4 + C_5 = 0 \quad (6)$$

Iz jednačina (4), (5), (6) jasno se vidi da imamo pet nezavisnih dimenzionalnih veličina a dve osnovne dimenzije. Iz toga proizilazi da imamo 3 (5-2) nezavisna Pi-člana i jednu bezdimenzionalnu veličinu μ koju možemo smatrati kao još jedan Pi-član.

Da bi se mogao rešiti sistem od dve jednačine (5) i (6) sa pet nepoznatih uzimaju se proizvoljne vrednosti za tri nepoznate i pomoću njih reše preostale dve.

Neka su te tri nepoznate C_1 , C_3 i C_5 .

Determinanta koeficijenata ostala dva člana C_2 i C_4 je

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Pošto determinanta nije nula, jednačine su nezavisne:

$$C_1 = 1$$

$$C_3 = 0$$

$$C_5 = 0$$

Zamenom u jednačinama (5) i (6) dobija se:

$$1 + C_2 - 2C_4 = 0$$

$$0 + 0 + C_4 = 0$$

$$C_4 = 0$$

$$C_2 = -1$$

Zamenom u jednačini (1) i eliminisanjem C_1 dobija se:

$$\pi_2 = \frac{a}{H}$$

Ako je

$$C_1 = 0$$

$$C_3 = 1$$

$$C_5 = 0$$

onda je

$$C_2 - 3 - 2C_4 = 0$$

$$1 + C_4 = 0$$

$$C_2 = 1$$

$$C_4 = -1$$

$$\pi_3 = \frac{KwH}{G}$$

$$C_1 = 0$$

$$C_3 = 0$$

$$C_5 = 1$$

$$C_2 - 2 - 2C_4 = 0$$

$$1 + C_4 = 0$$

$$C_2 = 0$$

$$C_4 = -1$$

$$\pi_1 = -\frac{T}{G}$$

Pošto je

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \pi_4)$$

onda je

$$\frac{T}{G} = f\left(\frac{a}{H}, \frac{KwH}{G}, \mu\right)$$

Da bi naponi u modelu predstavljali napone u prototipu moraju biti ispunjeni uslovi

$$\frac{a_p}{H_p} = \frac{a_m}{H_m}$$

$$\frac{Kw_p H_p}{G_p} = \frac{Kw_m H_m}{G_m}$$

$$\mu_p = \mu_m$$

Kad su ovi uslovi ispunjeni, naponi u prototipu prema naponima u modelu nalaze se u odnosu:

$$\frac{T_p}{G_p} = \frac{T_m}{G_m}$$

Određivanje odnosa opterećenja.

Kod ostvarenja uslova koje postavljaju odnosi model-prototip često se mora koristiti barodinamička metoda sa centrifugom.

Odnos opterećenja K je odnos centrifugalne sile, koja deluje na masu (m), i gravitacione sile koja deluje na tu istu masu (m).

$$K = \frac{\frac{mv^2}{r}}{\frac{mg}{r}} = \frac{\frac{v^2}{r}}{\frac{g}{r}} = \frac{\frac{(2\pi r N)^2}{r}}{\frac{g}{r}} = \frac{4\pi^2 r}{g} N^2$$

Ako je poluprečnik rotora centrifuge $r = 1,0$ m, a broj obrtaja N

$$K = \frac{4 \pi^2 r}{9,81 \times 60 \times 60} N^2 = 0,00112 N^2$$

Pri $N = 400$ obrtaja na minut, efektivna težina modela za vreme dok se nalazi pod dejstvom centrifugalne sile u centrifugi, $K = 178$ g.

Specijalni uslovi pri modeliranju i problem jamskog pritiska

Poznato je da za stensku masu ne važi jedinstveni zakon odnosa napona i deformacije. U zavisnosti od sastava stenske mase mehanički procesi u njoj se mogu opisati pomoću teorije elastičnosti, plastičnosti ili teorije visko-plastičnog tečenja.

Primena optičke metode za iznalaženje naponskog stanja u stenskoj masi ograničava se na slučajeve kada je stenska masa elastična i nema trajnih deformacija. U svim ostalim slučajevima optička metoda daje samo približnu sliku o naponskom stanju stenskog masiva u blizini jamskih radova.

Da bi se na modelu mogla proučavati pojave jamskog pritiska potrebno je da model zadovolji osnovne uslove mehaničke sličnosti.

Kod određivanja kriterijuma sličnosti pri modeliranju potrebno je izdvojiti osnovne sile koje deluju na proučavane pojave.

Osnovne sile koje deluju u stenskom masivu, oslabljene jamskim radovima, su sile teže i unutrašnje sile — naponi koji se javljaju u stenskom masivu.

Kriterijumi sličnosti izvode se iz opštег zakona Newtona i metoda dimenzione analize. U slučaju istovremenog dejstva sile teže i unutrašnjih napona, koji se javljaju u masivu koji okružuje rudarske prostorije:

$$\frac{F}{f} = \frac{\gamma_p}{\gamma_m} \cdot \frac{l^3_p}{l^3_m}$$

gde su:

F, f — sile, koje deluju u nekoj tački prototipa i modela

$\gamma_p, \gamma_m, l_p, l_m$ — zapreminske težine i linearne veličine prototipa odnosno modela.

Ako je

$$\frac{f}{l^3_m} = N_m \frac{F}{l^3_p} = N_p$$

onda je

$$\frac{N_m}{l_m \gamma_m} = \frac{N_p}{l_p \gamma_p} = k$$

gde je:

K — bezdimenzionalni broj koji predstavlja kriterijum sličnosti.

Da bi mehanički procesi, izazvani unutrašnjim naponima pod dejstvom sile teže u prototipu, bili slični odgovarajućim procesima u modelu, neophodno je da $k_m = k_p$.

U datim jednačinama „ N “ se može odnositi na različite vrste opterećenja modela i prototipa i ima dimenzije napona (npr. modul elastičnosti, granica tečenja, čvrstoća materijala na lom itd.)

Izraz

$$\frac{N_m}{l_m \gamma_m} = \frac{N_p}{l_p \gamma_p} = k$$

je osnovni obrazac za sličnost kod modeliranja mehaničkih processa u stenskom masivu.

Za primenu je pogodniji oblik:

$$N_p = \frac{\gamma_p}{\gamma_m} \cdot \frac{l_p}{l_m} N_m$$

Na osnovu ovog izraza primenjuje se za napon formula sličnosti:

$$\sigma_p = \frac{\gamma_p}{\gamma_m} \alpha \sigma_m$$

Gde je:

α — razmer geometrijske sličnosti

Ovaj obrazac je analogan obrazcu

$$\sigma_p = \frac{\beta}{\alpha^3} \sigma_m$$

Pri dejstvu zapreminskih sile razmer sličnosti daje se izrazom

$$\beta = \frac{p_p}{p_m} = \frac{\gamma_p}{\gamma_m} \alpha^3$$

Kod modeliranja stenskog masiva koji se sastoji iz više različitih slojeva, zbog održavanja uslova sličnosti u modelu, pored zadovoljenja gornjih uslova treba da se zadovolje za sve slojeve i odnosi:

$$\frac{\gamma_p}{\gamma_m} = Cte \quad \frac{E_p}{E_m} = Cte$$

gde je: E — modul elastičnosti

γ — specifična težina

Pri izradi i ispitivanju modela, koji zadovoljava uslove sličnosti, mora postojati i sličnost početnih i konturnih uslova stenskog masiva.

Stenski masiv je poluprostor ravnomerno opterećen sopstvenom težinom. Do izrade jamskih prostorija on se nalazio u uslovima prirodnog naponskog stanja.

U sistemu koordinata xyz, sa koordinatnim poče-

tkom na površini zemlje i y-osom upravljenom vertikalno nagore, za komponente napona neporemećenog stenskog masiva primenjuju se jednačine:

$$\sigma_y^o = \gamma (H - y)$$

$$\sigma_x^o = \sigma_z^o = \frac{\mu}{1-\mu} \gamma (H - y)$$

$$\epsilon_{xy}^o = \epsilon_{yz}^o = \epsilon_{xz}^o = 0$$

Druga jednačina se može napisati u obliku:

$$\sigma_x^o = \sigma_z^o = \sigma_y^o v$$

gde su kod linearne zavisnosti napona i deformacije v i μ date izrazom

$$v = \frac{\mu}{1-\mu}$$

Izrada jamskih prostorija dovodi do preraspođele naponskog stanja u stenskom masivu. Pri tom ukupni naponi, koji se javljaju u stenskom masivu posle izrade rudarskih prostorija, mogu se izraziti:

$$\sigma_x^T = \sigma_x^o + \sigma_x = v\gamma(H-y) + \sigma_x$$

$$\sigma_y^T = \sigma_y^o + \sigma_y = \gamma(H-y) + \sigma_y$$

$$\sigma_z^T = \sigma_z^o + \sigma_z = v\gamma(H-y) + \sigma_z$$

$$\epsilon_{xz}^T = \epsilon_{xz}$$

$$\epsilon_{yz}^T = \epsilon_{yz}$$

$$\epsilon_{xy}^T = \epsilon_{xy}$$

gde su:

σ_x^o , σ_y^o i σ_z^o — komponente početnog (prirodnog) naponskog stanja

σ_x , σ_y , σ_z , i ϵ_{xy} — dopunsko naprezanje koje se javlja u masivu zbog slabljenja stenskog masiva izradom rudarskih prostorija.

Iz ovih jednačina se jasno vidi zavisnost naponskog stanja stenskog masiva, oslabljenog rudarskim radovima, od Poisson-ovog koeficijenta. Prema tome, da bi se slika o naponskom stanju, dobivena optičkom metodom ispitivanja na modelu, mogla preneti na stenski masiv (prototip) mora se obezbediti i ista vrednost Poisson-ovih koeficijenata materijala kako kod modela tako i kod prototipa.

Kod modela izrađenih od optičkih materijala sa niskom vrednosću modela elastičnosti (igdantin i agarin) sopstvena težina materijala je dovoljna da izazove deformacije, koje će dati jasnu sliku naponskog stanja (izohromate).

Kod upotrebe materijala kao što su epoksidne smole sopstvena težina nije dovoljna da izazove potrebnu veličinu deformacija za optičko posmatranje, već se težina veštački povećava pomoću centrifugalnih sila.

Modeliranje sopstvene težine u polju centrifugalnih sila vrši se na centrifugu, a za ispitivanje modela služi metod „zamrznutih napona“.

Model izrađen od aktivno optičkog materijala stavi se u držaća rotora centrifuge snabdevene uređajem za zagrevanje.

Pri okretanju rotora centrifuge u držaću se održava temperatura „zamrzavanja“ i model izvesno vreme zagreva. Zatim se grejanje obustavlja, centrifuga i dalje radi, a model postepeno hlađi. Tako prizvenci naponi ostaju u materijalu modela „zamrznuti“. Optička slika napona u modelu biće slika ravnog napona, usled dejstva sopstvene težine, pod uslovom da je visina modela nekoliko puta manja od efektivnog poluprečnika rotora centrifuge.

Zapreminska težina materijala modela u centrifugalnom polju data je odnosom:

$$\gamma_m' = \frac{\gamma_m}{g} \left(\frac{\pi N}{30} \right)^2 R_c = \gamma_m K_c$$

$$K_c = \frac{R_c}{g} \left(\frac{\pi N}{30} \right)^2$$

gde je:

γ_m — zapreminska težina materijala modela

g — ubrzanje sila teže,

N — broj obrtaja rotora centrifuge, u min.

R_c — poluprečnik rotacije,

K_c — centrifugalni odnos.

Frelaz od napona u modelu na napone u prototipu vrši se preko izraza:

$$\sigma_p = \frac{\beta}{\alpha^2} \sigma_m$$

$$\beta = \frac{P_p}{P_m} = \frac{\gamma_p}{\gamma_m} \quad \alpha^2 = \frac{\gamma_p}{\gamma_m} \cdot \frac{\alpha^3}{K_c}$$

Zamenom β u gornjem obrascu dobija se jednačina za prevodenje napona u modelu na napone u prototipu pri centrifugalnom ispitivanju

$$\sigma_p = \frac{\alpha}{K_c} \cdot \frac{\gamma_p}{\gamma_m} \sigma_m$$

U nedostatku centrifuge uticaj sopstvene težine se veštački približno postiže opterećenjem modela spoljnim silama po njegovoj konturi.

U slučaju izotropnog elastičnog materijala, oslabljenog rudarskim radovima, pri određivanju napona uzima se da postoji ravna deforamacija. Sad se zadatak sastoji u rešavanju teškog, izotropnog poluprostora čiji se materijal ponaša po Hook-ovom

zakonu. Komponente napona prirodnog naponskog stanja masiva su tada:

$$\sigma_y = \gamma(H-y)$$

$$\sigma_x = -\gamma(H-y)$$

$$\epsilon_{xy} = 0$$

Ako se rudarska prostorija nalazi na većoj dubini može se u gornjem izrazu zanemariti „y”, jer je malo u poređenju sa dubinom H. Drugim rečima, težina izvađenog masiva mora biti dovoljno mala u poređenju sa težinom višeletežih naslaga.

Da bi se rešavanja uprostila, teški izotropni poluprostor se zamenjuje ravnom pločom, koja ima otvor ispitivane prostorije a zapreminske sile se postižu rasporedom opterećanja po konturi. Veličina greške, koja se ovim čini, je mala ako se prostorija nalazi na dubini $H > 20R$, gde je R radijus prostorije.

U praksi model se izrađuje u vidu ploče sa otvorom, čiji oblik odgovara poprečnom preseku prostorije. Otvor se izrađuje na dovoljnoj udaljenosti od ivica ploče. Opterećenje se raspoređuje po konturi ploče u vidu ravnomernog pritiska i odgovara po veličini naponu u neporemećenom masivu u centru projektovane prostorije.

Kod modela raspodela napona oko prostorije ne zavisi od apsolutnih dimenzija prostorije, sve dok se dimenzije prostorije mogu smatrati malim u poređenju sa dubinom.

Da bi se ostvarili različiti uslovi, koji postoje na granicama stenskog masiva koji se modelira, i da bi oni odgovarali prirodnim uslovima preporučuje se primena eksperimentalnog dodavanja naponskog polja. U tom slučaju naponsko polje pri složenim uslovima opterećenja može se ostvariti „dodavanjem“ naponskih polja izazvanih jednostavnijim sistemima opterećenja.

Princip dodavanja naponskih polja je opravдан, pošto se optički metod ispitivanja u mehanici stena primenjuje u slučaju linearne zavisnosti napona i deformacije.

Metod „dodavanja“ napona zasniva se na osobini nekih optičko aktivnih materijala da imaju visoku optičku osetljivost, kako pri temperaturi „zamrzavanja napona“ tako i pri sobnoj temperaturi.

Suština metoda je u sledećem: ako na model deluju jednovremeno dva sistema opterećenja a koje je teško ostvariti (reprodukcijski), to se mogu prvo u modelu „zamrznuti“ naponi pod dejstvom jednog sistema na temperaturi „zamrzavanja“, a zatim dopuniti drugim sistemom opterećenja pri sobnoj temperaturi. Pri tome, naponska polja tih dva sistema opterećenja se dodaju.

Uslovi sličnosti kod modeliranja sa optičkim aktivnim materijalima

Optički metod ispitivanja naponskog stanja u modelima je metod rešavanja odgovarajućeg problema pomoću teorije elastičnosti u ravni.

U opštem obliku jednačine teorije elastičnosti u ravni pomoću kojih se definiše problem su:

jednačine ravnoteže:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} + X=0$$

$$\frac{\partial \epsilon_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y=0 \quad (7)$$

uslovi kompatibilnosti: za ravnu deformaciju

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (8)$$

z stanje ravnog napona:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\mu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (9)$$

pri datim graničnim uslovima:

$$X_n = \sigma_x + m \epsilon_{xy}$$

$$Y_n = m \sigma_y + l \epsilon_{xy} \quad (10)$$

gde su:

X, Y-komponente zapreminske sile po jedinici zapremine

μ — Poisson-ov koeficijent

X_n, Y_n — komponente površinske sile po jedinici površine

m, l — kosinus smera normale N na konturu.

Granični uslovi mogu biti dati komponentama spoljnih sile na konturi elastičnog tela ili vrednostima komponentalnih pomeranja.

Da bi se rešio jedan problem u ravni treba integrirati sistem diferencijalnih jednačina (7) uzimajući u obzir jednačine (8), (9) i (10).

Kod većih tehničkih problema zapreminske sile su predstavljene težinom tela. Zapreminske sile se mogu zanemariti pri rešavanju pojedinih problema samo onda, kada su one male u poređenju sa spoljnim površinskim silama.

Da bi se znalo kada se mogu zanemariti zapreminske sile vrši se provera vrednosti izraza

gde je γ — zapreminska težina (kg/cm^3) l-linearna dimenzija (cm), q-površinska sila (kg/cm^2). Ako je vre-

dnost tog izraza manja od 1, zapreminske sile se u datom problemu mogu zanemariti.

U tom slučaju jednačina (7) imala bi sledeći oblik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) &= 0 \quad (11) \end{aligned}$$

Kod rešavanja zadatka gde su naprezanja izazvana zapreminskim silama veća od naprezanja izazvanih dejstvom spoljnih sila upotrebiće se jednačina (7).

Ako se uzme da je pravac dejstva zapreminske sile u pravcu minus y-ose, tada sistem diferencijalnih jednačina (7) dobija sledeći oblik:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} &= -Y \quad (12) \end{aligned}$$

Jednačine (8) i (9) tada imaju oblik

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

Teoretska osnova primene modela iz aktivno optičkih materijala za rešavanje raspodele napona je teorema Levy-Michell, koja glasi: kod zadanih spoljnih sile naponsko stanje u ploči zavisi samo od oblika i veličine a ne od materijala iz koga je izrađen.

Teorema Levy-Michell primenjuje se samo kod problema kada su granični uslovi dati spoljnim silama. Ako su, pak, granični uslovi dati pomerenjima, raspodela napona u tom slučaju zavisi i od konstanti elastičnosti materijala.

Kod problema u prostoru raspodela napona uvek zavisi od Poisson-ovog koeficijenta.

Rešenje zadatka u prostoru pomoću teorije elastičnosti svodi se na rešavanje jednačina ravnoteže:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \quad (13) \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0 \end{aligned}$$

i jednačina neprekidnosti deformacija:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^2} &= \\ = -\frac{\mu}{1+\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial X}{\partial x} \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial y^2} &= \\ = -\frac{\mu}{1+\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial z^2} &= \\ = -\frac{\mu}{1+\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Z}{\partial z} \\ \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x \partial y} &= - \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} \right) \quad (14) \\ \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x \partial z} &= - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

i pri graničnim uslovima:

$$\begin{aligned} X_n &= l \sigma_x + m \tau_{xy} + n \tau_{xz} \\ Y_n &= m \sigma_y + n \tau_{yz} + l \tau_{xy} \\ Z_n &= n \sigma_z + l \tau_{xz} + m \tau_{yz} \quad (15) \end{aligned}$$

gde su:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ \nabla^2 &= \left(\frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2} \right) \end{aligned}$$

∇ operator Laplasa

X_n, Y_n, Z_n — komponente površinske sile po jedinici površine;

l, m, n — kosinusii smera normale N na konturi.

U slučaju da nema zapreminske sile, ili je ona konstantna, desna strana jednačine (14) je nula, gde Poisson-ov koeficijent utiče na sistem preko leve strane. Otuda sledi da kod problema u prostoru raspored napona zavisi od Poisson-ovog koeficijenta.

Da bi se umanjio uticaj Poisson-ovog koeficijenta pri eksperimentima na modelu, potrebno je da vrednost koeficijenta materijala modela bude što bliže vrednosti materijala prototipa.

Uslovi sličnosti, kod fotoelastičnih metoda ispitivanja naprezanja, po kojima se izrađuje model od optički aktivnog materijala i na osnovu kojih se opažanja na modelu prenose na prototip, formiraju se iz analize razmernosti ili iz opštih funkcionalnih zavisnosti teorije elastičnosti.

Geometrijska sličnost i uslov sličnosti spoljnih sila modela i prototipa izražava se odnosima:

$$\alpha = \frac{l_p}{l_m}; \beta = \frac{P_p}{P_m}$$

- α — razmernost za geometrijsku sličnost
- β — linearne veličine prototipa odnosno modela
- σ_p, l_p — razmernost za sličnost spoljnih sila dela
- P_p, P_m — veličine spoljne sile na prototipu odnosno modelu.

Razmernosti α i β , modela i prototipa moraju biti identični. Oni se odabiraju uzimajući u obzir niz činjenica, koje omogućavaju najpogodnije uslove za izvođenje eksperimenta.

Odabiranjem razmernosti α i β određena je razmernost za napon tj. odnos napona u bilo kojoj tački prototipa i modela

$$\sigma_p = \frac{P_p}{(l_p)^2} \quad \sigma_m = \frac{P_m}{(l_m)^2}$$

$$\sigma_p = \frac{\beta}{\alpha^2} \sigma_m$$

Prelaz od modela u ravni debljine t na odgovarajući prototip debljine t_p vrši se preko odnosa:

$$\sigma_p = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{t_m}{t_p} \sigma_m$$

Sa odabranim α i β , razmernost linearnih pomeranja zavisi od odnosa konstanti elastičnosti modela i prototipa.

Iz Hook-ovog zakona imamo:

$$(\Delta l)_p = C \cdot \frac{1}{E_p} \cdot \frac{P_p}{(l_p)^2} l_p = C \cdot \frac{P_p}{E_p l_p}$$

$$(\Delta l)_m = C \cdot \frac{P_m}{E_m l_m}$$

$$(\Delta l)_p = \frac{E_m}{E_p} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \Delta l_m$$

Ako se obeleži linearno pomeranje sa U imamo:

$$U_p = \frac{E_m}{E_p} \cdot \frac{\beta}{\alpha} u_m$$

$$U_p = \frac{t_m}{t_p} \beta \frac{E_m}{E_p} u_m$$

Iz ovog odnosa vidimo, da odnos linearnih pomeranja na prototipu i na modelu kod proizvoljnih α i β ne moraju biti u skladu sa razmerom geometrijske sličnosti.

Ako isključimo iz naših posmatranja proučavanje napona pri velikim deformacijama, razmer linearnih pomeranja bira se da bude ravan razmeru samih odnosa.

U tom slučaju imamo:

$$\alpha^2 = \frac{E_m}{E_p} \beta$$

$$\frac{\sigma_p}{E_p} = \frac{\sigma_m}{E_m}$$

$$\sigma_p = \sigma_m \cdot \frac{l_m}{l_p} \cdot \frac{t_m}{t_p} \cdot \frac{P_p}{P_m}$$

$$P_p = \frac{\sigma_p}{\sigma_m} \cdot \frac{t_p}{t_m} \cdot \frac{l_p}{l_m} \cdot P_m$$

Optičko aktivni materijali koji se upotrebljavaju za izradu modela

Pitanje optičko aktivnih materijala, koji se upotrebljavaju za izradu različitih modela javlja se kao najvažniji problem kod optičke metode ispitivanja napona, pošto tačnost rezultata zavisi od svojstava i kvaliteta materijala.

Optičko aktivni materijal, koji služi za izradu modela mora da odgovara sledećim zahtevima:

- da bude prozračan;
- da ima visoku optičku osetljivost;
- da nema prethodnih ivičnih napona;
- da je izotropan i ima linearan odnos između napona i deformacije;
- da bude dovoljno krut;
- da ima postojane fizičko-mehaničke osobine pri umerenim temperaturama;
- da se lako mehanički obrađuje;
- da ima nisku cenu i da se može više puta upotrebiti.

Kod optičkog ispitivanja napona, za izradu modela koriste se tri grupe optički aktivnih materijala:

- neorganska stakla
- prozračni metali (halogenidi srebra, talijuma i njihove legure)
- visokomolekularna jedinjenja (celuloid, pleksiglas, polistirol, fenolformaldehidne smole, epoksidne smole i dr.).

Svaka grupa optički aktivnih materijala ima pojedine nedostatke.

Nedostaci materijala prve grupe: teška obrada pri izradi modela i niska optička osetljivost.

Materijali druge grupe ograničeno se upotrebljavaju jer gube prozračnost, osetljivi su na svetlost i

vremenom tamne. Materijali treće grupe našli su najširu primenu kod izrade modela za fotoelastična ispitivanja.

Celuloid je dosta prozračan, izotropan, optičke osetljivosti pet puta veće od optičke osetljivosti stakla, glavni nedostatak je mala mehanička čvrstoća.

U zavisnosti od stepena polimerizacije imamo različite vrste formaldehidnih smola kao što su: bakelit, fenolit, marblet, dekorit i dr.

Pri proučavanju plastičnih deformacija mogu se upotrebiti materijali u čiji sastav ulaze kalofonijum sa različitim plastifikatorima. Materijal sa odnosom kalofonijuma prema vazelinu 4:1 daje prozračan materijal, koji daje dobru i jasnu sliku izohromata, dopušta visoki stepen plastičnih deformacija i može se upotrebiti nekoliko puta.

Optički materijal dobiven mešanjem kalofonijuma i dikienbutadiena ugljovodonika ($C_{20}H_{22}O_2$) u odnosu 1:2 je prozračan i može se više puta upotrebiti. Pri većim brzinama opterećenja puca, a pri manjim deformira plastično.

Za izradu modela koriste se različiti optički aktivni materijali: epoksidne smole (araldit), fenolformaldehidne smole tipa denorit, bakelit, fosterit, tralon, pleksiglas, polistirol, agar-agar, želatin, igdantin i dr.

Pri proučavanju naponskog stanja stenskog masiva oko jamske prostorije na modelu neophodno je imati optičke materijale različitih modela elastičnosti, jer je stenski masiv nehomogen i sastavljen iz slojeva različitih fizičko-mehaničkih osobina. Po-ređ toga, pri modeliranju jamskih prostorija gde se osnovnim silama koje dejstvuju javlja sopstvena težina stenskog masiva, optičko aktivni materijali treba da imaju takve osobine da omogućavaju dobijanje naponskog stanja ali bez dejstva spoljnih sila.

Ovom uslovu u najvišoj mjeri odgovaraju igdantin, optičko aktivni materijal na želatin-glicerinskoj bazi, agarin čiji je osnovni sastavni deo agar-agar i opoksidne smole sa određenim dodatkom dibutilftalata.

Igdantin je jedan od malobrojnih materijala pogodnih za proučavanje naponskog stanja pod dejstvom sopstvene težine materijala. Za razliku od drugih materijala igdantin ima nizak modul elastičnosti i visoku optičku osetljivost. Relativno se prosto priprema, moguće je podešavati modul elastičnosti i može se ponova upotrebiti. Igdantin se priprema iz fotoželatina (10—45%), čistog glicerina (30%) i vode (25—60%). Zapreminska težina, modul elastičnosti i optički koeficijent moguće je menjati u određenom dijapazonu izmenom odnosa komponenti, što nam omogućava i modeliranje slojeva.

Agarin je optičko aktivni materijal i pogodan za modeliranje stenskog masiva. On dozvoljava izučavanje naponskog stanja modela bez upotrebe spoljnih sila. Za razliku od igdantina on je krt materijal.

Zato je na modelima od agarina moguće proučavati ne samo naponsko stanje u stenskom masivu oko rudske prostorije već i prirodu njegovog rušenja.

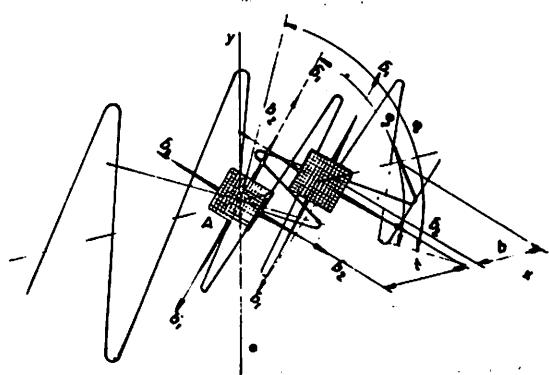
Komponente koje ulaze u sastav agarina su agar-agar (1—5%), glicerin (5—30%) i voda (65—94%).

Kombinacija agarina i igdantina kao materijala za izradu modela proširuje broj problema koji se mogu rešavati optičkim metodama.

Važna osobina epoksidnih smola je visoka optička aktivnost kako pri sobnoj tako i pri temperaturi „zamrzavanja napona”. Ovi materijali imaju modul elastičnosti oko 30.000 kg/cm^2 . Promena modula je moguća izmenom procentualnog udela pojedinih komponenti. Komponente koje sadrže epoksidne smole su: epoksidna smola, očvršćivač (anhidrid maleinske kiseline) i plastifikator (dibutilftalat). Povećanjem sadržaja plastifikatora i istovremenim smanjenjem sadržaja anhidrida maleinske kiseline moguće je dobiti optički aktivni materijal sa vrednošćima modula elastičnosti od $300—600 \text{ kg/cm}^2$, što je za 50—100 puta manja vrednost od vrednosti modula većine materijala, koji se koriste kod standardnog ispitivanja metodom fotoelastičnosti.

Osnovne postavke i metod ispitivanja napona u polarizovanom svetlu

Za izučavanje naponskog stanja neke konstrukcije optičkim metodama, izrađuje se model te konstrukcije ili tog objekta. Modeli se izrađuju iz prozračnih izotropnih materijala koji pod dejstvom spoljnih sila postaju optički anizotropni. Optičke osobine takvih materijala su u određenoj zavisnosti od njihovog naponskog stanja.



Sl. 1 — Razlaganje polarizovanog zraka.

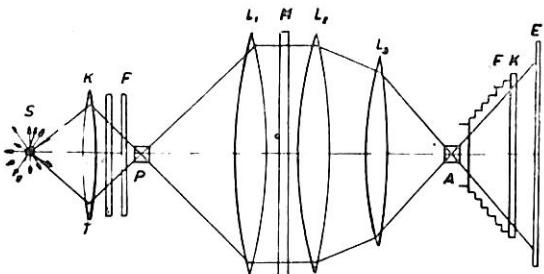
Predmet neposrednog izučavanja kod fotoelastične metode je optički efekat izazvan opterećenjem koji omogućava iznalaženje neke zavisnosti za ocenu

naponskog stanja modela. Prepostavljamo da se neka elastična oblast nalazi u uslovima naponskog stanja u ravni. Svaka tačka te oblasti je pod dejstvom orijentisanih glavnih napona σ_1 i σ_2 .

Upravimo na takvu oblast, upravo na njenu površinu, snop monohromatske polarizovane svetlosti u ravni. Neka kroz tačku A prolazi snop polarizovane svetlosti u ravni, sa nagibom ravni polarizacije Θ_1 prema X-osi. Ako posmatrana oblast nije pod naponom, to polarizovani zrak prolazi kroz tačku A neporemećen. Ako pak, u tački A dejstvuju glavni naponi σ_1 i σ_2 pod uglom Θ_2 odnosno $\Theta_2 + 90^\circ$ s obzirom na X-osu, to polarizovani zrak pri padu na površinu prolazi kroz tačku A i razlaže na dva polarizovana zraka u ravni, koja leži u ravnim glavnim napona. Pri različitim vrednostima glavnih napona, brzine prostiranja polarizovane svetlosti u odgovarajućim ravnima su različite. Ova dva polarizovana zraka, prolaskom kroz ploču debljine „t“ imaju različita relativna zadocnjena. Ta relativna zadocnjena su proporcionalna razlici glavnih napona $\sigma_1 - \sigma_2$ i debljini ploče t.

$$\delta = C t (\sigma_1 - \sigma_2) = 2 C t \tau \quad (16)$$

Jednačina (16) daje osnovni zakon optičkog metoda ispitivanja naprezanja u modelu u granicama elastičnih deformacija.

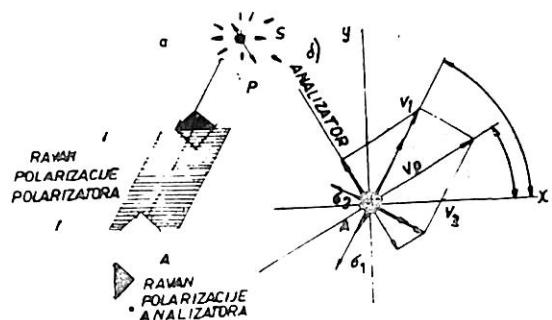


Sl. 2 — Polarizacioni aparat.

Gornja slika daje principijelnu šemu polarizacionog aparata.

- S — izvor svetla
- K — kondenzator
- T — toplotni filter
- C — svetlosni filter
- P — polarizator
- L₁ — sočivo
- M — model
- L₂ — sočivo
- L₃ — projekciono sočivo
- A — analizator
- F — foto kamera
- E — projekcioni ekran

Ako je uzajamni odnos polarizatora i analizatora takav da njihove ravni polarizacije zaklapaju ugao od 90° i ako se model ukloni, analizator ne propušta svetlo. To je sistem ukrštenih polaroida.



Sl. 3 — Sistem ukrštenih polaroida.



Sl. 4 — Model grede opterećen na čisto savijanje.



Sl. 5 — Raspored izohromata modela rudarske prostorije u slojevitom stenskom masivu.

Polarizovani zrak u ravni sa amplitudom vibracija „a“ i fazom φ predstavljamo jednačinom:

$$V = a \sin \varphi$$

Kad ovaj zrak padne normalno na površinu modela koji je pod naponom, on će se razložiti na dva, sa ravnima polarizacije u ravnima glavnih napona σ_1 i σ_2 , pa će imati:

$$V_1 = V \cos (\Theta_2 - \Theta_1) = a \sin \varphi \cos (\Theta_2 - \Theta_1)$$

$$V_2 = V \sin (\Theta_2 - \Theta_1) = a \sin \varphi \sin (\Theta_2 - \Theta_1)$$

Pošto su σ_1 i σ_2 različiti po veličini, to će i brzina prostiranja komponenti V_1 i V_2 biti različita. Ako je $V_1 > V_2$ i vibracije koje izlaze iz modela fazno će se razlikovati.

$$V'_1 = a \cos(\Theta_2 - \Theta_1) \sin(\varphi' + \alpha)$$

$$V'_2 = a \sin(\Theta_2 - \Theta_1) \sin \varphi'$$

Komponenta koja napušta analizator je:

$$\begin{aligned} V_a &= V'_1 \sin(\Theta - \Theta_1) - V'_2 \cos(\Theta - \Theta_1) = \\ &= a \sin(\Theta_2 - \Theta_1) \cos(\Theta_2 - \Theta_1) [\sin(\varphi' + \alpha) - \sin \varphi'] = \\ &= a \sin 2(\Theta_2 - \Theta_1) \sin \frac{\alpha}{2} \left[\sin(\varphi' + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}) \right] \end{aligned}$$

ili

$$V_a = A \sin \left(\varphi' + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

gde je:

$$A = \sin 2(\Theta_2 - \Theta_1) \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{amplituda}$$

faza

$$\varphi' + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$$

Intenzitet svetlosti je proporcionalan kvadratu amplitude

$$I = C A^2$$

gde je: „C“ koeficijent proporcionalnosti

$$I = C a^2 \sin^2 2(\Theta_2 - \Theta_1) \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Ako je:

$$\alpha = 2\pi n$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi n \lambda}{\lambda} = \frac{\pi \delta}{\lambda}$$

gde je „n“ ceo broj ili nula a „ λ “ talasna dužina upotrebljene monohromatske svetlosti.

Za datu vrednost $\frac{\pi \delta}{\lambda}$ intenzitet će biti maksimalan ako je:

$$\sin 2\alpha = 1 \text{ odnosno } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Uslov $2\alpha = \pi n$ je ostvaren kada su glavni naponi u ravni modela paralelni ili polarizatoru ili analizatoru. U svim tačkama modela u kojima je taj uslov ispunjen intenzitet transmitovane svetlosti biće nula. Ako je slika modela projektovana na ekran

pojavljuju se pojedini tamni delovi koji pokazuju mesta svih tačaka modela gde su pravci glavnih naponi paralelni polarizatoru ili analizatoru. Ove linije nazivaju se izoklinama.

Drugi uslov kada je intenzitet svetla smanjen je pri $\frac{\pi \delta}{\lambda} = n\pi$, gde je δ relativno zadocnjene a „n“ ceo broj. Sa monohromatskom svetlošću odnosno sa svetlošću kojoj odgovara jedna talasna dužina, svetlost će biti potpuno ugađena u svim tačkama gde je razlika glavnih naponi nula. Kako su promene glavnih naponi kontinuelne to će biti i njihove razlike. Na taj način efekat relativnog zadocnjene se odražava pojmom izvesnog broja linija. Svaka od njih povezuje tačke u kojima je relativno zadocnjene ceo broj. Ove linije se nazivaju izohromatama.

Tačke modela koje imaju iste max. tangencijalne naponi r_{max} imaju i isto relativno zadocnjene pa prema tome i odgovarati jednoj izohromati nekog reda. Redom izohromate naziva se njen redni broj, odbrojan od zone gde je $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Ta zona je izohromata nultog reda.

Promena max. tangencijalnog napona koja izaziva razliku relativnih zadocnjenja jednaku talasnoj dužini, naziva se vrednost izohromata modela r_{max} i određuje se kalibracijom.

Slika izohromata omogućava određivanje max. tangencijalnih naponi, a time i razlike glavnih naponi u svakoj tački modela.

Slika izoklina omogućava konstruisanje trajektorija glavnih naponi — izostata.

ZAKLJUČAK

Obrađene su osnovne postavke i metod ispitivanja naponi na modelima u polarizovanom svetlu, principi izrade modela i dat je pregled materijala koji se koristi za izradu modela kod fotoelastičnih ispitivanja.

Literatura

- Frocht, M. M., 1948.: Photoelasticity, v. 1 and 2. — John Wiley, New York.
- Hiramatsu, Y., Niwa, Y., Oka, Y., 1957: Measurement of Stress Field by Application of Photo-elasticity. — Techn. Repts. Engng. Inst. Kyoto Univ. No. 37.
- Kobliška, M. A., 1956: Barodinamička metoda u teoriji i praksi. — Zbornik Rudarsko-geološkog fakulteta, Beograd.
- Lee, G. H., 1962: An Introduction to Experimental Stress Analysis. — John Wiley, New York.
- Magnickij, B. A., 1953: Osnovy fiziki zemli, Moskva.
- Sinclair, D., Bucky, Ph. B., 1940: Photoelasticity and Its Application to Mine-pillar and Tunnel Problems. — Am. Inst. Mining and Met. Pub., Techn. Pub. No. 1140.
- Timoshenko, S., 1951: Theory of Elasticity. — Mc-Graw Hill Co.
- Trumbac'ev, B. F., Molodcova L. C., 1963: Primenenie optičeskogo metoda dlja issledovanija naprjažennogo sostojanija porod vokrug gornyx vyrobok. — AN SSSR, Moskva.
- Otkopavanje i jamski pritisak. Izveštaj za 1964. godinu, Rudarski institut, Beograd.

